Universidade Estadual do Centro-Oeste
Departamento de Física
CEDETEG

Introdução à construção de gráficos

2004

1. Introdução

Gráficos, como equações e tabelas, mostram como se relacionam duas ou mais grandezas físicas. Como investigar quais são as relações existentes entre as grandezas constitui grande parte do trabalho, tanto experimental como teórico, em física; equações, tabelas e gráficos são importantes ferramentas.

Assim, uma boa forma de analisar um conjunto de dados experimentais e resumir os resultados é colocá-los em um gráfico. É importante fornecer, no gráfico, toda a informação necessária que permita sua leitura correta e simples. A escolha de uma escala adequada e do tipo de escala também é importante.

A avaliação sobre a qualidade do ajuste da curva é realizada comumente pelo controle do gráfico, dos pontos experimentais e da curva ajustada teoricamente.

Um gráfico constitui uma ferramenta para extrair informação sobre uma determinada experiência. Por isso, é muito importante ser cuidadoso em sua apresentação. No caderno de laboratório do aluno, o gráfico é essencialmente um auxilio para os cálculos; em um relatório mais formal o gráfico representa a conclusão de um projeto e necessita ser mostrado de uma maneira mais elegante e profissional. O gráfico não deve estar desordenado ou sobrecarregado com cálculos de inclinação ou de outras grandezas.

Para uma compreensão razoável, as seguintes informações devem estar presentes no gráfico (ver também seção 2):

- um título[1];
- identificação dos eixos para se definir as grandezas físicas representadas;
- as unidades físicas das grandezas físicas representadas;
- um símbolo (por ex. um ponto) que corresponda a cada dado experimental, e barras de erros ou retângulos de erros associados a cada dado;
- para análise gráfica feita no gráfico, em particular para os pontos experimentais, utilizar uma identificação clara;
- uma legenda se mais de um conjunto de dados experimentais está representado no gráfico.

A construção de gráficos nos permite realizar uma estimativa de uma determinada grandeza através da inclinação de uma reta média, ou através

[1] Vide comentário sobre o título de um gráfico na seção 2.

do seu coeficiente linear. Esta aplicação não é uma das mais importantes, principalmente quando a reta média é feita de forma visual. Deve-se considerar também que os gráficos são um auxiliar importante para a "visualização" de um determinado fenômeno, uma tendência ou comportamento dos dados, que às vezes ficam difíceis de serem observados quando os resultados estão registrados somente na forma de tabelas. Em geral, um gráfico transmite um quadro mais claro dos seus resultados que uma tabela de números. Quando a análise dos dados experimentais é feita através de um gráfico, chama-se **Análise de Dados pelo Método Gráfico**.

Um gráfico permite determinar como uma variação numa grandeza conduz a uma variação na outra. Descobrir que não existe correlação entre as grandezas representadas no gráfico poder ser também um importante resultado num projeto de pesquisa. Para nível de graduação, isso poderia acontecer se o aluno colocou as variáveis erradas no gráfico ou inclusive se realizou a experiência de forma errada.

Um gráfico de dados experimentais pode fornecer uma descrição qualitativa, mas concisa, do experimento sem a necessidade de realizar cálculos adicionais. Se os dados não estão correlacionados, não vai existir, de forma clara, uma relação entre as variáveis, e uma análise adicional não é necessária.

Para uma descrição mais quantitativa necessitamos estabelecer se existe uma relação matemática entre as variáveis. Algumas relações matemáticas podem ser identificadas imediatamente; por exemplo, equações do tipo $y = c\,x^n$ aparecem regularmente em física, onde *c* e *n* são constantes. O valor de *n* poderia não ser óbvio a partir dos dados, mas o aluno deve ser capaz de identificar e representar graficamente as funções para $n > 1; n < 1$ e $n = 1$. As funções mais freqüentes encontradas pelos alunos incluem $y = c\,x^2, y = c\sqrt{x}$ e $y = \frac{c}{x}$, assim como a função linear.

Uma relação matemática poderia a priori ser fixada pela teoria. Desta maneira podemos usar esta teoria ou os resultados do ajuste da curva para obter alguns significados físicos dos parâmetros. Por exemplo, a posição de uma partícula que cai livremente sob a gravidade é descrita por um polinômio de segunda ordem $y = a + b\,x + c\,x^2$, onde os parâmetros *a*, *b* e *c* representam a posição inicial ($a = x_0$), a velocidade inicial ($b = v_0$) e a metade da aceleração ($c = \frac{g}{2}$), respectivamente. Os números obtidos a partir dos resultados do ajuste quadrático da curva nos permitem atribuir valores a esses parâmetros.

Uma vez que se tem uma equação que descreve o comportamento dos dados experimentais, podemos usá-la para predizer como uma experiência poderia se comportar fora do intervalo de medição por meio de uma interpolação ou extrapolação (vide seção 3). A análise por regressão pode fornecer somente uma descrição matemática dos dados experimentais; compete ao aluno explicar seu significado físico.

Qualquer curva pode ser ajustada pela soma de um polinômio da forma $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Esse ajuste inclusive pode ser feito para um conjunto de dados um tanto errático, isto é, é possível encontrar uma função que descreva os valores originais muito bem. No entanto, uma função sem base física não vai ter interpretação física e não tem significado independentemente dos valores obtidos pelo computador.

Quaisquer que sejam as funções matemáticas usadas, a análise deve ser mantida tão simples como seja possível, e não devemos ser "tolos" tentando tornar o problema mais complicado. Assim, se os dados experimentais mostram um comportamento linear, nada mais complicado deve ser testado que um ajuste linear. Por outro lado, um ajuste linear não deve ser experimentado se os dados não seguem um comportamento linear óbvio.

Atualmente, o ajuste de curva pelo método gráfico dos pontos experimentais pode ser considerado um caminho romântico ou nostálgico para se obter uma estimativa dos parâmetros de uma função. De qualquer maneira, podemos enfrentar ainda a situação onde o computador, presente em quase todo lugar, não possa ser acessado para realizar um ajuste numérico estatístico. Além disso, esse tipo de exercício possui ainda um valor pedagógico, e de fato merece ser estudado.

Embora o uso de gráficos seja uma linguagem utilizada com freqüência na Física, Química, Engenheiras e outras áreas para se discutir e explorar conceitos, os procedimentos para a construção e interpretação de gráficos por muitos ainda são desconhecidos. Para a utilização de forma adequada desta "linguagem matemática", é fundamental que se tenha conhecimento de como construir gráficos "manualmente", o qual iremos discutir detalhadamente a seguir.

É importante comentar que em nenhum momento é subestimada a conveniência do uso dos programas de computador para construir gráficos, mas a capacidade de realizar um gráfico e de interpretar o significado dele é uma aptidão fundamental que os alunos devem aprender primeiramente enquanto usam lápis e papel. Esta habilidade é desenvolvida à medida que

realizam muitos experimentos que incluem a construção de gráficos de uma forma ou outra.

2. Escala linear

A escala mais simples de se trabalhar é a escala linear. Uma escala linear é aquela em que a coordenada de um ponto é proporcional à grandeza que ela representa. Gráficos de dados que exibem uma relação linear ($y = a + b\,x$) entre as variáveis são particularmente úteis. Tomemos por exemplo o conjunto de pontos medidos (x_i, y_i), onde existe uma relação quadrática entre x e y (por ex. $y = a + c\,x^2$). Um gráfico de y_i versus x_i mostrará uma curva em forma de parábola da relação entre x e y, mas não será útil na determinação das constantes a e c. Já um gráfico de y_i versus x_i^2 permite um ajuste linear, uma média sobre todos os dados, resultando em um valor melhor ajustado para a (coeficiente linear), determinado por meio do intercepto do eixo y, e para c (inclinação da reta) calculado através da inclinação do ajuste (vide seção 5).

Um outro exemplo da vantagem de se escolher as variáveis das coordenadas de forma tal que a curva representada seja linear, pode ser vista na equação de Sellmeier que relaciona o índice de refração com o comprimento de onda

$$n^2 = 1 + \frac{A\,\lambda^2}{\left(\lambda^2 - B\right)}. \tag{2.1}$$

Reescrevendo esta equação obtemos

$$\lambda^2 = B + A\left(\frac{\lambda^2}{n^2 - 1}\right). \tag{2.2}$$

Um gráfico de λ^2 versus $\lambda^2/\left(n^2 - 1\right)$ vai fornecer os melhores valores ajustados para A e B a partir da inclinação da curva e de seu intercepto, respectivamente.

O ajuste de curva para funções que não apresentam uma dependência linear será abordado na seção 5.

Em uma escala linear, costumamos definir o chamado **fator de escala** (ou **módulo de escala**), que é a razão entre a variação da grandeza que se quer representar e o comprimento do papel disponível para um eixo. Por

exemplo, se o comprimento do papel disponível para o eixo *y* é $L = 280\ mm$, e a grandeza varia de 0 a 12 V, o fator de escala será dado por

$$f_y = \frac{\Delta G}{L} = \frac{(12-0)V}{(280-0)\,mm} = 0{,}0429\,\frac{V}{mm} \cong 0{,}05\,\frac{V}{mm},$$

ou seja, cada milímetro (*mm*) do eixo *y* corresponde a 0,05 V.

Neste exemplo, arredondou-se o fator de escala para um valor maior que o calculado. Esta prática é aconselhável, pois torna o fator de escala mais fácil de se trabalhar e permite utilizar todos os valores da grandeza. Se tivéssemos arredondado o fator para 0,04 V/mm, necessitaríamos mais do que 280 mm para representar os últimos valores da grandeza maiores que 11,2 V; além disso a construção do gráfico seria muito mais trabalhosa, em dependência do valor do fator de escala. Como procedimento geral, aconselha-se adotar fatores de escala fáceis de trabalhar, isto é, escalas nas quais a menor divisão do papel (eixo), por exemplo 1 mm, coincida com a unidade da medição ou se necessário com múltiplos ou submúltiplos de essa unidade, em fatores $2;\frac{1}{2};5;\frac{1}{5};10;0{,}1;100;0{,}01;etc.$, ou de forma geral $(1;2;5)x10^{\pm n}$, sendo *n* um número inteiro.

Não se devem empregar fatores de escala em que as coordenadas de um dado experimental sejam difíceis de serem reconhecidas. Por exemplo, deve se evitar que 1 mm coincida com $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{9};\frac{1}{7};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$ da unidade empregada. Deve se evitar também fatores de escala 3, 7 e 9.

Um outro cuidado importante que se deve levar em conta ao escolher uma escala é considerar que se têm dados experimentais com 4 ou 5 algarismos significativos, tem que se evitar escolher uma escala muito estreita (fator de escala grande) em que somente pode se apreciar 2 ou 3 algarismos significativos. Essa escolha implicaria em uma perda de toda a informação contida nos últimos algarismos significativos, e, por conseguinte, jogar fora uma boa parte do trabalho experimental realizado com uma boa precisão.

Por outro lado, se os instrumentos de medição utilizados não fornecem mais que um ou dois algarismos significativos, não deve se escolher uma escala muito grande (fator de escala pequeno) de tal forma que permita apreciar mais de dois algarismos, já que não seria necessário, e é falso. Se existe ainda espaço no papel (eixo) para prolongar a escala, nunca deve fazer-se além do que corresponderia à precisão da medição.

Considerando os fatos anteriores, sugere-se não fazer escalas que varram muito além do intervalo de medições, por exemplo, se as medidas são

entre 2,36 s e 6,04 s, não é necessário construir um gráfico com uma escala entre 0 e 10 s, sendo suficiente de 2,30 s até 6,10 s.

A seguir, relacionamos, em forma de resumo, alguns cuidados que devem ser tomados quando se está construindo um gráfico:

a) coloque na parte superior do gráfico o título do gráfico;

   Gráficos publicados em periódicos científicos normalmente não têm título. Em vez disso, é usada uma legenda descritiva da figura. Assim, não é necessário usar (sempre) um título, mas se decidimos colocá-lo no gráfico, ele deve ser claro e auto-explicativo. "Gráfico de *y* contra *x*" não é apropriado se os eixos já foram identificados por *x* e *y*. Esse título não fornece ao leitor nenhuma nova informação sobre o gráfico. Um gráfico que estuda a lei de Ohm por meio do comportamento da diferença de potencial como função da corrente elétrica poderia ter como título "Verificação da lei de Ohm". Escrevendo, por exemplo, "Gráfico da diferença de potencial contra corrente elétrica" o gráfico não informa nada sobre do que se trata a experiência.

b) a variável dependente deverá estar (quase) sempre no eixo vertical (eixo das ordenadas) e a independente no eixo horizontal (eixo das abscissas), isto é, coloque a causa no eixo horizontal e o efeito no eixo vertical;

   Isso significa que o eixo *x* contém a grandeza que pode ser controlada enquanto o eixo *y* contém a que varia como uma conseqüência da variação da que contém *x*. Assim, por exemplo, temos que na experiência da lei de Ohm, a corrente é variada no circuito e é medida a queda de potencial (voltagem) através do resistor. Isto não significa que todos os gráficos de voltagem contra corrente possuem a corrente indicada ao longo do eixo *x*. Por exemplo, na experiência de Franck-Hertz[2] a voltagem é variada e a corrente é medida. O aluno poderia se perguntar, por que essa diferença? No primeiro exemplo, utilizamos a inclinação da curva (vide seção 4) para determinar a resistência do resistor. No segundo, determinamos a energia de excitação, por exemplo, dos átomos de mercúrio. Esta última experiência é completamente diferente da primeira e não existe uma razão para esperar que as curvas sejam as mesmas nos gráficos. Como

[2] A experiência de Franck-Hertz está descrita na maioria dos livros de Física Moderna, por exemplo, R. Eisberg e R. Resnick, "Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas". Editora Campus, 18ª Tiragem, pp. 148-151.

decidir o que colocar em cada eixo, vai depender de qual informação deseja-se extrair do gráfico.

c) fatores de escalas fáceis de operar e interpretar ou indique claramente o fator de escala para cada eixo (vide comentário acima);
d) trace os eixos e indique as grandezas com as respectivas unidades entre parênteses; no eixo horizontal é usual colocar essa informação abaixo do eixo ou abaixo da seta (ao lado direito), e no eixo vertical ao lado esquerdo;
e) gradue os eixos em espaços regulares, de 1cm em 1 cm ou de 2 cm em 2 cm; evite deixar muito espaçamento entre as graduações, ou acumular muitos números nos eixos;
f) procure não escrever todos os dados da tabela, que, em geral, são "quebrados"; localize-os, sem escrever os números; pior do que esse procedimento, é escrever exatamente os números presentes nas tabelas, sem as graduações em espaços regulares;
g) ao localizar os pontos, não utilize "tracejados" para todos os pontos, reserve os "tracejados" para alguns pontos importantes, por exemplo, para determinara inclinação da reta;
h) represente os dados no gráfico por "ponto", "cruz", "retângulo" ou um outro símbolo que torne os dados visíveis (eles devem ser visíveis, porém não exagere!; lembre da precisão da informação), não utilize apenas "pontinhos" para localizá-los;
i) não ligue os pontos "dois a dois" através de segmentos de retas, nem passe uma curva "lisa" por todos os pontos; lembre-se que, em Física, nenhuma medida é "exata";
j) trace uma curva que melhor se ajuste aos pontos, ou seja, uma "curva média", que passe pela maioria dos dados experimentais, de tal modo que o número de pontos situados acima da curva seja aproximadamente igual ao número de pontos abaixo;
k) no caso em que a curva esperada é uma reta, trace uma reta média de modo que o número de pontos que estejam acima da reta seja aproximadamente igual ao número de pontos abaixo da reta (para mais informações sobre esta situação especial ver seção 4);
l) quando se deseja representar também o erro da medida, coloque barras horizontais e/ou verticais, de comprimento apropriado. Na verdade, para o ajuste da curva tem que se colocar <u>sempre</u> as barras de erros (ou retângulos de erros).

Em relação ao item *l)*, lembre que nenhuma medida em física possui um significado físico a menos que uma estimativa da sua incerteza lhe seja indicada. Utilizam-se as barras de erros em um gráfico para indicar

incertezas. Desta maneira, o valor verdadeiro da medida da grandeza fica entre o limite superior e o inferior da barra de erro. As barras de erros poderiam ser omitidas somente se elas fossem muito pequenas para ser mostradas na escala especifica do gráfico. Por outro lado, quando os erros de cada ponto podem ser representados, é importante não deixar de fazê-lo porque isto ajuda a traçar visualmente a melhor curva ou reta que passa pelos pontos experimentais. Pode acontecer que se esteja analisando pontos experimentais que teoricamente estejam vinculados por uma relação linear, mas no gráfico os pontos aparecem relativamente espalhados e provoque dúvidas de como traçar a reta. Entretanto, com ajuda das barras de erros ou retângulos de erros, poderão ser encontradas rapidamente uma ou várias retas que passem por todas as regiões de incertezas representadas no gráfico.

Se apesar das barras ou retângulos de erros nota-se ainda um espalhamento acentuado dos dados experimentais, significa que a precisão do método utilizado foi baixa e que os erros aleatórios se tornam significativos[3].

Na seção 7, veremos como processar os erros aleatórios nos gráficos.

3. Interpolação e extrapolação

Ao traçar uma linha contínua juntando os pontos experimentais ou desenhando a melhor curva no gráfico estamos fazendo uso da **interpolação**. A interpolação é a ação pela qual preenchemos o espaço em branco entre os dados experimentais através de uma curva contínua que supostamente mostra o comportamento dos próprios pontos.

Por outro lado, a **extrapolação** significa estender a curva fora do intervalo dos limites dos valores medidos, <u>sob a hipótese que o comportamento da curva permanece sendo o mesmo fora do intervalo do experimento</u>.

Tanto a interpolação como a extrapolação possuem seus riscos. No caso da interpolação, em dependência do intervalo Δx da variável de controle, podemos estar considerando um comportamento falso dos dados experimentais. Por isso, quando existe alguma razão para duvidar da interpolação feita, o experimentador deve repetir as medições procurando estreitar Δx para detectar qualquer anomalia.

Se utilizarmos um intervalo razoavelmente estreito, e não surgem anomalias, a interpolação resultante é confiável. Infelizmente, o critério para decidir o intervalo Δx que é razoavelmente estreito, é fornecido pela experiência de trabalho com as medições, e não indicações fornecidas a

[3] Vide o capítulo V no texto "Introdução ao cálculo de incertezas em medidas físicas".

priori. A única sugestão geral que pode ser dada é a de estar atento aos instrumentos de medição não somente no ato da leitura, senão durante todo o tempo de medição.

Sobre o traçado da curva de interpolação, lembramos que esta curva não precisar conter todos os pontos experimentais (vide item *j)* na seção 2). O traçado da curva de interpolação se faz sem desvios bruscos para cada ponto experimental; tentando passar ao longo da região dos pontos (barras de erros), deixando aproximadamente a mesma quantidade de pontos de um lado e do outro da curva, de forma eqüidistante (levando em conta as barras de erros).

Em relação à extrapolação, esta pode ser muito mais perigosa. Muitas leis físicas, encontradas a partir de experimentos realizados em um intervalo determinado, têm deixado de ser válidas quando utilizadas fora dos limites dos valores inicialmente experimentados. Como exemplo destes fracassos temos a aplicação das leis de Newton para velocidades próximas a velocidade da luz no vácuo e para o micro-mundo. Eles resultaram na teoria da Relatividade e da Mecânica Quântica, respectivamente.

A extrapolação é justificada num gráfico somente se a lei estudada se conhece antecipadamente, e a mesma é usada somente como ferramenta para se determinar algum parâmetro de interesse. Se não for conhecida a lei, a extrapolação resultante pode ser falsa. No entanto, o caminho da pesquisa exige às vezes estes riscos. Se a premissa feita desta forma é falsa, a própria prática, o demonstrará e obrigará a uma revisão da hipótese teórica. Se a predição é certa, teremos ficado mais perto do conhecimento de nosso mundo.

4. Gráficos lineares. Centróide.

A teoria atrás da maioria dos experimentos nos laboratórios introdutórios é geralmente simples o suficiente para ser descrita por meio de um gráfico linear.

A relação matemática mais fácil de reconhecer em um gráfico é a linear. Qualquer outra curva provocará dúvidas sobre a função $y = f(x)$ que lhe corresponde.

Ao se colocar os dados experimentais em um gráfico e a curva obtida for uma linha reta, a função que relaciona as variáveis é $y = a + b\,x$, onde *a* e *b* se determinam a partir do gráfico. A inclinação *b* é calculada a partir de **dois pontos da reta** nos extremos do intervalo de medição. Assim, teríamos que

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{4.1}$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas de dois pontos da reta traçada.

Observe que o parâmetro *b* foi denominado como **inclinação da reta** e não como coeficiente angular. A segunda denominação é associada a um ângulo, principalmente pelos estudantes que determinam o valor do parâmetro por meio da relação $b = tg\theta$, onde θ é ângulo entre o eixo das abscissas e a melhor reta. O primeiro a ser comentado é que $tg\theta$ fornece como resultado um número adimensional, enquanto o parâmetro *b* possui unidades. Por outro lado, o valor de *b* somente coincide numericamente com o valor da $tg\theta$ quando os fatores de escala forem os mesmos em ambos os eixos (*b* é apenas numericamente igual a $tg\theta$).

O valor do coeficiente ou parâmetro linear *a* pode ser calculado através da relação

$$a = y_i - b\, x_i \,, \tag{4.2}$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas de um ponto <u>sobre a linha reta</u>. Outra maneira de se determinar *a*, seria fazer uma extrapolação da linha reta até o eixo *y* (vide seção 3). O ponto onde a reta intercepta (corta) o eixo *y*, isto é para $x = 0$, representa o valor do coeficiente linear *a*. Nesta situação o valor de *a* é determinado diretamente.

Os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) escolhidos para calcular a inclinação da reta, cujas coordenadas (x_i, y_i) foram medidos e/ou calculados diretamente, **não** precisam ser dados experimentais. Os dados experimentais (juntos com as barras de erros) servem de guia para traçar a <u>melhor reta, a qual é traçada deixando-se a mesma quantidade de pontos dos dois lados da reta</u>. Se os retângulos de erros estão indicados no gráfico, as regiões por eles delimitadas devem ser consideradas na hora de traçar a melhor curva. Na verdade, o que denominamos de "melhor reta" representa uma das diferentes possíveis retas que podem ser traçadas no gráfico. Portanto, o correto é falar, o traçado de uma reta média e não a reta média.

Os pontos da melhor reta traçada são mais confiáveis para o cálculo da inclinação que os próprios dados experimentais. Essa reta é o resultado de contrabalançar os erros aleatórios de cada medição, e, em princípio, representa valores mais exatos que os das medições isoladas (do mesmo modo que o valor médio de uma grandeza é mais exato que as leituras individuais da grandeza que são utilizadas para calculá-lo[4]). Como na situação

[4] Vide o capítulo X no texto "Introdução ao cálculo de incertezas em medidas físicas".

da repetição da medida de uma grandeza, quanto maior o número de dados experimentais mais precisa será a reta experimental para expressar a relação entre as variáveis *x* e *y*.

Se o intervalo de valores medidos não contém o valor $x = 0$ nem valores próximos a ele, o melhor aproveitamento da folha de papel milimetrado fará com que o coeficiente linear *a* não possa ser lido diretamente no gráfico. Isto é, se a escala do eixo *x* escolhida entre dois números que não incluem $x = 0$, o intercepto que se observa sobre o eixo *y* no gráfico não será o valor do coeficiente linear *a* procurado; este corresponde somente a $x = 0$. Assim, do gráfico não se pode extrair diretamente o valor de *a*. Nesta situação se deve proceder como indicado acima na relação (4.2).

Um ponto que auxilia muito para traçar uma reta média que representa a relação linear dos dados experimentais (x_i, y_i), é aquele cujas coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ representam os valores médios (aritméticos) dos valores experimentais (x_i, y_i):

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ , \tag{4.3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \ . \tag{4.4}$$

O ponto com coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ é denominado **centróide** da distribuição de pontos no gráfico. Ao representar os pontos no papel, se estes sugerem uma relação linear entre *x* e *y*, deve-se calcular as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centróide e colocá-lo também no papel. A melhor reta traçada passará pelo centróide, deixando iguais quantidades de pontos de um lado e do outro.

5. Linearização ou anamorfose.

De forma geral, é conveniente trabalhar com gráficos de funções lineares. Ao obtermos um conjunto de pontos experimentais, se quisermos comparar estes resultados com algum modelo teórico, isso será mais fácil se a função teórica for linear. Obviamente, nem todos os sistemas físicos têm comportamento linear, o que nos leva muitas vezes à necessidade de se

proceder a linearização de uma função, ou anamorfose. Isto é, se temos uma função a qual não é linear, podemos aplicar-lhe funções para linearizá-la.

Podemos formular o problema matematicamente nos seguintes termos. Consideremos que

$$y = y(x; a, b) \tag{5.1}$$

seja uma função não linear com dois parâmetros *a* e *b*. Se encontrarmos a transformações

$$Y = Y(x, y) \text{ e } X = X(x, y), \tag{5.2}$$

que permitem escrever a seguinte relação

$$Y = X\,F(a, b) + G(a, b), \tag{5.3}$$

onde *F* e *G* são expressões conhecidas que somente dependem de *a* e *b*, então teremos linearizado *y*. Uma vez que *F* e *G* têm sido encontradas por métodos gráficos ou numéricos, as constantes *a* e *b* podem ser determinadas pela inversão de *F* e *G*. As incertezas de *a* e *b* podem ser calculadas pela propagação de erros[5]. Freqüentemente, a complexidade da inversão de *F* e *G* torna o método de linearização impraticável.

Algumas vezes, a linearização da função pode ser atingida com escalas não lineares como será mostrado na seção 6.

5.1 Função quadrática

Considere que

$$y = a\,x^2.$$

Definindo (duas funções para linearizar a função)

$$X(x) = x^2, \quad Y(y) = y$$

então vamos ter a função linear

$$Y(X) = a\,X,$$

[5] Vide o capítulo XI no texto "Introdução ao cálculo de incertezas em medidas físicas".

que pode ser representada num gráfico linear. O parâmetro a é agora a inclinação da linha reta, e pode ser estimado usando os métodos anteriormente explicados (ver item 4).

A função quadrática representa uma situação especial da função potência que será abordada a seguir.

5.2 Função potência

Considere a função

$$y = b\,x^{a}. \tag{5.4}$$

Aplicando logaritmo em ambos lados da expressão (5.4) obtém-se

$$\log y = a \log x + \log b\,.$$

Ao definirmos as seguintes funções

$$Y = \log y, \quad X = \log x,$$

vamos obter a função linear

$$Y = a\,X + \log b\,. \tag{5.5}$$

Neste caso, o coeficiente angular a e o intercepto $\log b$ da reta média traçada são o expoente de x e o logaritmo do coeficiente de x, na equação (5.4), respectivamente.

5.3 Função exponencial

Considere a função

$$y = b e^{a\,x}. \tag{5.6}$$

Aplicando logaritmo em ambos lados da expressão (5.6) obtém-se

$$\log y = \left(a \log e\right) x + \log b\,.$$

Se agora definimos as seguintes funções

$$Y = \log y, \quad X = x\,,$$

vamos obter a função linear

$$Y = (a \log e)\, X + \log b. \qquad (5.7)$$

Neste caso a inclinação da reta média traçada é $a \log e$, e o intercepto no eixo Y é $\log b$.

6. Escalas logarítmicas

Uma escala logarítmica é um eixo cuja escala é proporcional ao logaritmo do valor representado. A base do logaritmo é arbitrária para escalas logarítmicas; no entanto por simplicidade considera-se base 10.

Por exemplo, se representamos numa escala logarítmica os números $\log_{10} 0.1 = -1$, $\log_{10} 1 = 0$, e $\log_{10} 10 = 1$, observamos que eles estão eqüidistantes. Em geral, qualquer múltiplo da potencia 10 vai estar a uma mesma distância do valor anterior e/ou posterior. A distância é característica para um papel com escala logarítmica (de base 10), e é denominada de **década**.

Uma das vantagens principais do uso de escalas logarítmicas é que podemos representar intervalos de várias ordens de magnitude numa folha. Outra vantagem da utilização da escala logarítmica é para a linearização de funções, o que será discutido a seguir.

Existem essencialmente duas situações que podem ser linearizadas utilizando papel de escalas logarítmicas, conhecidas também como papel logarítmico. Quando ambos os eixos de coordenadas são logarítmicos, tem-se o chamado papel *log-log* ou *di-log*, e quando somente um dos eixos é logarítmico e o outro linear, tem-se o papel *semi-log* ou *mono-log*.

Se os dados experimentais obedecem uma lei de potência ($y = b\, x^a$), podemos obter uma linha reta para a melhor curva, se representarmos y e x numa escala logarítmica, especificamente num papel *di-log* (vide item 5.2).

Se os dados experimentais obedecem uma lei exponencial ($y = be^{ax}$), obteremos uma linha reta (melhor curva), se representarmos graficamente o logaritmo de y versus x, isto é, se utilizamos um papel semi-logarítmico (*semi-log*) (vide item 5.3).

Ao observar uma folha com escala logarítmica, percebemos que os valores dos eixos podem representar intervalos diferentes dependendo dos valores dos dados experimentais. Tendo um papel com três décadas, os intervalos podem ser 1-10; 10-100 e 100-1000. Se os dados contêm valores

menores que 1, as três décadas poderiam ser 0,01-0,1; 0,1-1 e 1-10, mas se é de interesse representar valores de x desde x=300 até x=70000, as mesmas três décadas representarão os intervalos 100–1000; 1000-10000 e 10000-100000. Costuma-se utilizar a notação científica para identificar os intervalos.

Ao colocar ou procurar um ponto na escala logarítmica deve-se levar em conta que a escala do gráfico não é a mesma em todos os subintervalos. Por exemplo, entre 1 e 2 existem 10 divisões, enquanto entre 8 e 9 apenas 2. Por outro lado entre 3 e 4 existem 5 divisões. Assim, o valor de cada divisão pode ser diferente para cada subintervalo, por exemplo, entre 1 e 2 vale 0,1; entre 8 e 9 vale 0,5 e entre 3 e 4 corresponde a 0,2. Pelo exposto acima, deve se tomar muito cuidado ao se colocar pontos nas escalas logarítmicas.

Um outro cuidado importante que se deve tomar ao trabalhar com papel logarítmico é o seguinte: considere que se deseja calcular a inclinação de uma reta média dada pela expressão (5.5) em um <u>papel *di-log*</u>. Nesta situação os pontos da reta estão distribuídos segundo os valores de $\log y$ e $\log x$, não valores de *y* e *x*. Por isto, a inclinação será:

$$\textit{inclinação} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log\left({y_2}/{y_1} \right)}{\log\left({x_2}/{x_1} \right)}.$$

Da mesma maneira que explicado no item 4, deve-se tomar os pontos extremos sobre a reta e dentro do intervalo de medição.

Para um gráfico linear num <u>papel *semi-log*</u>, a inclinação é dada por:

$$\textit{inclinação} = \frac{\log\left({y_2}/{y_1} \right)}{x_2 - x_1}.$$

Para se determinar o intercepto sobre um dos eixos logarítmicos, lembre-se que, o que está sendo representado é o valor do logaritmo do número, mas a leitura do número é feita diretamente na escala.

Na tabela I estão indicadas algumas das experiências básicas dos cursos de laboratórios. Nela estão também relacionadas as correspondentes expressões, assim como as grandezas que devem ser representadas nos eixos *x* e *y*. Além disso, estão incluídas as informações que podem ser obtidas a partir da inclinação e do intercepto da reta ajustada.

Tabela I. Relação de experiências usuais nos laboratórios de física; expressões fundamentais de cada experiência bem como as grandezas que podem ser obtidas por meio da inclinação e o intercepto de um gráfico de uma linha reta. Os símbolos possuem seu significado habitual.

Experiência	Formula	Eixo x	Eixo y	Inclinação	Intercepto
Queda livre	$y = \frac{g\,t^2}{2} + y_0$	t^2	y	$\frac{g}{2}$	y_0
Pendulo Simples	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$	ℓ	T^2	$\frac{4\pi^2}{g}$	0
Dilatação térmica de uma vareta	$\ell = \ell_0\left(1+\alpha\,\Delta t\right)$	Δt	ℓ	$\ell_0\,\alpha$	ℓ_0
Descarga de um capacitor	$V = V_0\,e^{-t/RC}$	t	$\ln V$	$-\frac{1}{RC}$	$\ln V_0$
Medida do campo magnético	$B = \frac{\mu_0 NI}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$	$\log\left(x^2+R^2\right)$	$\log B$	$-\frac{3}{2}$	$\log\left(\mu_0 NI\right)$
Distância focal de uma lente fina	$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s'}$	-1	$\frac{1}{f}$
Índice de refração de um meio	$n = \frac{sen\theta_i}{sen\theta_r}$	$sen\theta_r$	$sen\theta_i$	n	0
Efeito Fotoelétrico	$hf = eV_0 + \phi$	f	V_0	$\frac{h}{e}$	$-\phi$
Constante de Rydberg	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$-R$	$\frac{R}{4}$
Decaimento radioativo	$N = N_0\,e^{-\lambda t}$	t	$\ln N$	$-\lambda$	$\ln N_0$

Observando a tabela podemos ver que as relações de potência ou exponencial podem ser representadas calculando-se primeiro os logaritmos ou fazendo uso dos papeis logarítmicos. Informações úteis podem também ser obtidas a partir do intercepto do eixo x, por exemplo, na experiência do efeito fotoelétrico, o intercepto em x fornece o valor do da freqüência de corte. Veja que a inclinação da reta pode ser negativa ou positiva.

7. Erros da inclinação e do intercepto pelo método gráfico

Nesta seção vamos analisar como podemos estimar o erro total associado ao intercepto *a* e à inclinação *b* da linha reta, utilizando o método gráfico no papel milimetrado. O resultado final deve ser expresso na forma:

$$b \pm E_b, \quad a \pm E_a ,$$

onde E_b e E_a representam os erros totais da inclinação e do parâmetro linear da melhor curva traçada, respectivamente.

Vamos considerar que as correções relacionadas aos erros sistemáticos já foram feitas. Cada dado experimental está afetado ainda por três tipos de erros independentes: um aleatório *s*, outro de precisão da escala dos instrumentos α, e o último de precisão da escala do eixo no papel β[6]. Cada coordenada (x_i, y_i) dos dados experimentais carrega estes erros.

A melhor reta ou reta média, traçada a partir dos pontos experimentais, admite um erro *x* para cada um de seus pontos expressado pela relação:

$$E_x = \sqrt{s_x^2 + \alpha_x^2 + \beta_x^2} , \tag{7.1}$$

e um erro em *y* dado por:

$$E_y = \sqrt{s_y^2 + \alpha_y^2 + \beta_y^2} . \tag{7.2}$$

A seguir, vamos a analisar duas situações extremas.

a) A reta média passa por todos os dados experimentais

Nesta situação, os erros aleatórios *s* e de precisão dos instrumentos α são bem menores que os erros de precisão das escalas gráficas β ($s_i, \alpha_i \ll \beta_i$), nos correspondentes eixos (os erros *s* e α ficam "comprimidos" dentro da escala). Esta circunstância faz que com os erros de cada variável (grandeza) sejam determinados (aproximadamente) pelas seguintes expressões:

$$E_x \cong \beta_x, \quad E_y \cong \beta_y .$$

---

[6] Para o papel milimetrado, por exemplo, β estará dado pelo fator de escala nos dois eixos (vide item 2).

O erro do intercepto será:

$$E_a = \sqrt{\beta_y^2 + (b\beta_x)^2}\ . \qquad (7.3)$$

A expressão (7.3) será justificada mais adiante.

O erro total da inclinação pode ser determinado através da propagação de erros quadrático da relação $b = \Delta y / \Delta x$[7]. De onde obteremos

$$\frac{E_b}{b} = \sqrt{\left(\frac{\beta_x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\beta_y}{\Delta y}\right)^2}\ , \qquad (7.4)$$

onde Δx e Δy são determinados sobre a reta média traçada a partir de pontos próximos aos extremos do intervalo de medição.

Na prática, esta situação pode ser considerada sempre que dois terço ($2/3$) ou mais dos dados experimentais fiquem sobre a melhor reta traçada, e o resto dos pontos não estejam muito afastados segundo os erros de precisão dos instrumentos α_x e α_y, ou seja que a reta média passe, no mínimo por suas regiões de incerteza.

Se mais de um terço ($1/3$) dos dados experimentais está fora da melhor curva traçada ou o espalhamento dos pontos for maior que o permitido pelos erros α_x e α_y, deve-se avaliar os erros aleatórios como se explica a seguir.

b) A reta média deixa dados experimentais em ambos lados

Neste caso, os erros aleatórios e de precisão dos instrumentos são maiores ou similares ao de precisão de, no mínimo, uma das escalas (eixos) do gráfico.

Analisemos como determinar os erros aleatórios da inclinação s_b e do intercepto s_a. O método que será descrito a seguir requer de 30 ou mais pontos experimentais para ser efetivo.

Para se determinar o erro aleatório do intercepto s_a, desloca-se a reta média para cima de forma paralela a ela mesma de modo que fiquem sob ela $2/3$ dos pontos experimentais. Esta reta deslocada para cima

[7] Vide o capítulo XI no texto "Introdução ao cálculo de incertezas em medidas físicas".

corresponde um valor de intercepto máximo a_{max}. Da mesma maneira desloca-se a melhor reta para baixo, também de forma paralela a ela mesma, até que restem $2/3$ dos pontos acima dela. A esta nova reta deslocada lhe corresponde um valor de intercepto mínimo a_{min}. A diferença entre os interceptos destas retas $(a_{max} - a_{min})$ fornece um valor aproximado do desvio padrão do intercepto a partir dos N pontos medidos. Observe que entre as retas extremas ficam $1/3$ dos pontos, e que no intervalo $\pm\sigma$ em torno do valor médio devem estar aproximadamente $2/3$ dos dados experimentais, isto é, cerca do 68%, pelo que $1/3$ deles corresponde a $+\sigma$ e o outro $1/3$ a $-\sigma$ [8].

O <u>erro aleatório do intercepto</u> pode ser estimado pela seguinte relação:

$$s_a = \frac{a_{max} - a_{min}}{\sqrt{N}} . \tag{7.5}$$

Para se calcular o <u>erro aleatório da inclinação</u> dividimos o intervalo de medições de x em três regiões com iguais quantidades de pontos experimentais, tendo como limite direito e esquerdo os dados experimentais. A região central, próxima ao centróide não é levada em conta para o que será explicado a seguir. A melhor reta é girada em torno do centróide (ou bem perto dele) para cima e para baixo para calcular as inclinações extremas possíveis para o conjunto de dados experimentais: b_{max} e b_{min}.

Para aproximar a variação $(b_{max} - b_{min})$ ao desvio padrão σ_b, as retas de inclinações extremas são escolhidas do seguinte modo: a de maior inclinação deixa $2/3$ dos pontos por baixo de si mesma na região da direita, e $2/3$ dos dados por cima de si mesma na região da esquerda; a reta de menor inclinação se obtém distribuindo os dados experimentais em cada região de maneira inversa a maior. Deste modo entre as retas com inclinações b_{max} e b_{min} ficam $1/3$ dos pontos experimentais.

O <u>erro aleatório da inclinação</u> é avaliado aproximadamente por:

$$s_b = \frac{b_{max} - b_{min}}{\sqrt{N}} , \tag{7.6}$$

[8] Vide o item X.3 no texto "Introdução ao cálculo de incertezas em medidas físicas".

onde b_{max} e b_{min} se determinam a partir do próprio gráfico.

Se conhecermos da teoria, isto é, com antecedência, que a reta passa pela origem de coordenadas, $x = 0$, $y = 0$, o intercepto será $a = 0$, e sem erro[9]. O anterior representa uma imposição teórica (ver abaixo situação prática). O erro aleatório da inclinação se determina de forma similar, mas neste caso, a melhor reta traçada deve ser girada em torno da origem de coordenadas e não do centróide, e as duas regiões que devem ser consideradas para a análise são as duas mais afastadas da origem, isto é, a região que contém a origem não é considerada. Desta maneira, a reta de inclinação máxima se obtém quando a reta girada para cima deixa para baixo $2/3$ dos pontos das duas últimas regiões; enquanto a reta de inclinação mínima deixa para cima dela mesma $2/3$ destes pontos. O erro aleatório da inclinação é calculado pela mesma expressão (7.6).

O método explicado neste item ***b)*** constitui um método aproximado com resultados muito similares aos que se obtém por meio de métodos mais precisos, mas que são muito mais trabalhosos, a não ser que se conte com um computador.

O aluno poderia se perguntar; tenho pontos experimentais suficientes para realizar meu processamento de dados? À medida que o aluno vai desenvolvendo suas habilidades na construção de gráficos, será capaz de decidir por si mesmo quando existem pontos suficientes. Um gráfico deve mostrar bastantes pontos experimentais sobre todo o intervalo para obter um quadro completo do comportamento das variáveis.

Na prática, isto é, nas experiências básicas dos primeiros anos universitários, a coleta de dados está restringida, em geral, a um número de medidas em torno de 10. Isto é devido, principalmente, aos custos e tempo disponível para a realização da coleta de dados. Por este fato, explicamos a seguir outra metodologia para estimar o erro aleatório da inclinação e do intercepto da reta média.

No gráfico, desenhamos o retângulo de erro correspondente para cada dado experimental. Cada retângulo deve estar centrado no ponto experimental, tendo como comprimento de cada lado o dobro da incerteza no ponto para cada grandeza. A seguir traça-se uma linha reta com máxima inclinação e outra com inclinação mínima, tomando como pivô o centróide (ou

[9] Para aplicar esta restrição deve se ter cuidado, nas condições experimentais, que ela seja válida.

um ponto próximo dele). As retas com inclinação máxima e mínimas devem passar, no mínimo, por $2/3$ dos retângulos de erros.

A partir dessas duas curvas teremos dois valores extremos para a inclinação *b* e o intercepto *a*. A média aritmética deles fornecerá valores estimados de *b* e *a* para a melhor curva traçada:

$$b = \frac{b_{\max} + b_{\min}}{2}, \quad a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2}. \tag{7.7}$$

A **incerteza máxima** para cada um dos parâmetros pode ser estimada pela semidiferença dos valores extremos da inclinação e do intercepto:

$$s_b \cong \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2}, \quad s_a \cong \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2}. \tag{7.8}$$

Nesta situação, onde os gráficos experimentais não têm mais de 10 pontos, e às vezes menos, podem estimar-se também os erros aleatórios de *b* e *a* fazendo uso das expressões (7.6) e (7.5), respectivamente. Aqui os valores obtidos representam estimativas dos erros estatísticos, tendo magnitudes menores que os conseguidos pela equação (7.7).

Quando realizamos a **imposição teórica de pontos** para ajustar uma curva, significa que estamos supondo que a incerteza dos dados experimentais não está dominada por qualquer erro sistemático, isto é, os erros sistemáticos são desprezíveis quando comparados com os aleatórios. De fato, se temos um erro sistemático, os pontos teóricos não vão se alinhar com os pontos experimentais. Isto pode provocar provavelmente um grande erro sistemático na estimativa dos parâmetros, especialmente no caso de ajuste estatístico.

Se para nossa reta média <u>impormos</u> que ela passe pela origem de coordenadas $(0,0)$; as retas com máxima e mínima inclinação também terão que passar pela origem. Nessa situação o intercepto será $a = 0$, e sem erro. Ao traçar as curvas com maior e menor inclinação, deve-se sempre tentar passar por todos os retângulos de erros dos dados experimentais. O valor da inclinação da melhor curva e de seu erro é calculado pelas expressões correspondentes em (7.7) e (7.8).

De forma geral, o <u>erro total para inclinação</u> é calculado pela expressão:

$$E_b = \sqrt{s_b^2 + \alpha_b^2 + \beta_b^2}, \tag{7.9}$$

onde α_b representa o erro na inclinação devido ao erro de precisão da escala dos instrumentos com se mediram as grandezas *x* e *y*; β_b representa o erro na inclinação devido ao erro de precisão das escalas do gráfico *x* e *y*. O erro aleatório da inclinação s_b pode ser estimado pelas expressões (7.6) ou (7.8), em dependência da coleta de dados.

Para a determinação dos erros de precisão α_b e β_b utilizamos a relação (4.1) que nos permite calcular a inclinação: $b = \Delta y / \Delta x$. A esta expressão aplicamos a propagação quadrática de erro, obtendo-se:

$$\frac{\alpha_b}{b} = \sqrt{\left(\frac{\alpha_x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_y}{\Delta y}\right)^2}\ , \text{e} \qquad (7.10)$$

$$\frac{\beta_b}{b} = \sqrt{\left(\frac{\beta_x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\beta_y}{\Delta y}\right)^2}\ . \qquad (7.11)$$

Das equações (7.10) e (7.11) podemos isolar α_b e β_b. Nas expressões anteriores Δx e Δy representam os intervalos completos das medições feitas para as grandezas *x* e *y*. Isto significa que Δx mede o intervalo entre os extremos da coleta de valores da grandeza x onde se realizaram as medições; e de forma similar para Δy. É com estes intervalos extremos que se calcula a inclinação *b*: $b = \Delta y / \Delta x$.

Para o <u>erro total do intercepto</u> da melhor curva tem se:

$$E_a = \sqrt{s_a^2 + \alpha_a^2 + \beta_a^2}\ , \qquad (7.12)$$

onde o erro aleatório s_a é calculado pelas equações (7.5) ou (7.8); α_a representa o erro do intercepto devido aos erros de precisão dos instrumentos, e β_a indica a precisão das escalas do gráfico.

Deve-se levar em conta aqui que apesar do intercepto ser sobre o eixo *y*, na sua determinação vão influir não somente os erros de precisão do eixo *y*, como também os do eixo *x*. Um erro α_x nas variáveis do eixo x pode deslocar a reta média experimental, de forma paralela a si mesma, num intervalo α_x ao longo do eixo *x*. Por este motivo, o intercepto no eixo *y* vai experimentar uma variação $\delta y = b\,\alpha_x$, independentemente das variações que

poderia introduzir no intercepto o erro de precisão α_y. Levando-se em contas ambas as causas temos:

$$\alpha_a = \sqrt{\alpha_y^2 + \left(b\,\alpha_x\right)^2}\,. \tag{7.13}$$

De maneira análoga, obtém-se para o erro de precisão da escala:

$$\beta_a = \sqrt{\beta_y^2 + \left(b\,\beta_x\right)^2}\,. \tag{7.14}$$

Conhecidos os diferentes tipos de erros, e calculados os erros totais da inclinação e do intercepto da reta média dos dados experimentais podemos expressar o resultado final dos coeficientes como:

$$b \pm E_b, \quad a \pm E_a\,.$$

Devemos salientar que na maioria das situações, muitos dos termos que intervem nos cálculos de α_b, β_b, α_a e β_a são menores que a metade dos outros da raiz. Lembre-se que em tal situação, esses termos podem, em geral, ser desconsiderados. O cálculo de erros é, normalmente, aproximado a um algarismo (às vezes a dois), e não é de grande precisão. Por isso, não vale a pena estar somando termos que ao serem elevados ao quadrado e tirados da raiz vão afetar o segundo, terceiro ou quarto algarismo significativo do erro.

O processamento dos erros nos gráficos *di-log* (ou *log-log*) não será abordado neste texto. Comentaremos apenas que um mesmo erro de precisão em todas as medições se manifesta como erro diferente nos distintos intervalos da escala logarítmica. Como esta escala se contrai ao passar de 10 a 100, o comprimento do erro também se contrai. Na seguinte ordem, de 100 a 1000, o erro continua-se contraindo. Observe que aparentemente o papel volta a ampliar-se de 100 a 200; na verdade dentro desse intervalo temos agora um algarismo significativo a mais que no intervalo de 90 a 100, e é o último algarismo quem carrega a precisão da medição, desta maneira o erro fica ainda mais comprimido.

Esta contração gráfica do erro de precisão e do erro aleatório torna difícil o cálculo de erros estatístico a partir do gráfico. Entretanto, pode-se estimar um limite de erro aleatório para a inclinação e o intercepto, a partir do gráfico, de uma maneira similar como foi explicado acima para o papel milimetrado.

Para os gráficos em papel *mono-log* também poderia ser feito uma estimativa de um limite de erro estatístico a partir do gráfico.

8. Bibliografia

1. Raúl P. Duany: "Procesamento de Datos Experimentales". Editora ENPES, La Habana, 1988.